DIFFERENZIEREN MIT DIFFERENTIALEN

Von
Rudolf J. Taschner

Vortrag anläßlich des Lehrerfortbildungstages der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft am 3. April 1981 im mathematischen Institut der Universität Wien

Die für die Differentialrechnung wesentlichen Merkmale lernt der Schüler am besten in ihrer physikalischen Einkleidung: Es soll die Bewegung eines Teilchens entlang einer Geraden studiert werden. Faßt man diese Gerade als Zahlengerade auf und denkt man sich den Körper in einem Punkt konzentriert, hat man zugleich eine Meßskala für den Ort x des Teilchens. Diese Lage kann sich mit der Zeit t ändern: zu jedem Zeitpunkt befindet sich der Körper an einer bestimmten Stelle; x ist mit anderen Worten eine von t abhängige Variable, $x = x(t)$.

Der dem Physiker unmittelbar einsichtige Variablenbegriff ist dem nur an der sogenannten „modernen" (Schul)mathematik ausgerichteten Mathematiklehrer so fremd geworden, daß ich ihn kurz wieder vertraut machen möchte: Die Variable x des Ortes bedeutet keineswegs eine reelle Zahl, die man nicht kennt oder nicht kennzeichnen möchte, x bedeutet auch keinen sogenannten „Platzhalter" (übrigens: ein häßliches Wort) für eine reelle Zahl, also gleichsam ein leeres Loch, welches man mit einer Zahl stopfen kann, die kontinuierliche Variable x bezeichnet vielmehr *einen Begriff* – im obigen Beispiel den „Ort des Teilchens" –, *der Zahlen als Werte annehmen kann.* Schreibt man z.B.

$$x = -5$$

bedeutet dies keineswegs die *Identität* von x mit -5, sondern lediglich, daß x hier den Wert -5 annimmt (ohne -5 zu *sein*), d.h. das Teilchen liegt 5 Längeneinheiten in negativer Richtung vom Ursprung entfernt.

Daß x eine von der Zeit t abhängige Variable ist, bedeutet: der Wert, den die Variable x annimmt, ist durch die Vorgabe jenes Wertes, den die Variable t annimmt, eindeutig bestimmt. Das Gesetz, das den der Variablen x zukommenden Wert aus dem von t angenommenen Zahlenwert berechnet, heißt jene Funktion f, welche die Zuordnung von t zu x regelt.

Die Bezeichnung

$$x = f(t)$$

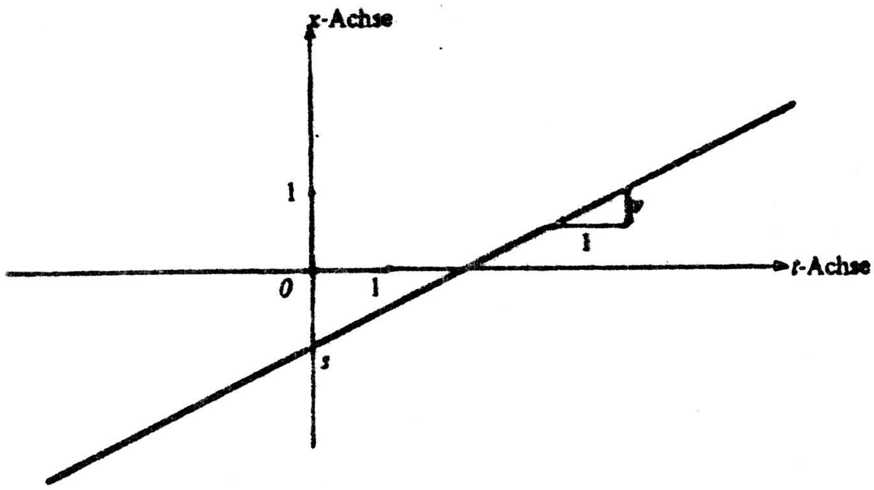
ist deshalb nicht verwerflich, weil $f(t)$ keineswegs einen Funktionswert, sondern den gemäß dem Zuordnungsgesetz f von der Zeit t abhängigen Ort x bezeichnet. Schreibt man statt $x = f(t)$ bloß $x = x(t)$, hebt man hervor, daß x eine von t abhängige Variable ist; die Zuordnungsvorschrift, welche t mit x verbindet, wird in $x(t)$ gar nicht benannt.

Ich möchte betonen: Diese Auffassung hat nichts mit der von der Mengenlehre beeinflußten pseudo–formal–axiomatischen Schulmathematik gemein, einer Mathematik, die vor mehr als einer Dekade Mode geworden ist und von der man sich derzeit geradezu krampfhaft zu lösen versucht. Ich schlage vor, diese Ablösung möglichst radikal, d.h. von der Wurzel her, zu vollziehen und zu anschaulich klaren und mit Inhalt erfüllten Begriffen – wie z.B. zum klassischen Begriff der Variablen – zurückzukehren.

Nun aber zurück zur Begründung der Differentialrechnung: Nach dem ersten newtonschen Axiom der Mechanik verharrt ein kräftefreier Körper entweder in Ruhe oder er bewegt sich geradlinig gleichförmig. Dies bedeutet die Gültigkeit eines Zuordnungsgesetzes der Gestalt

$$x = vt + s$$

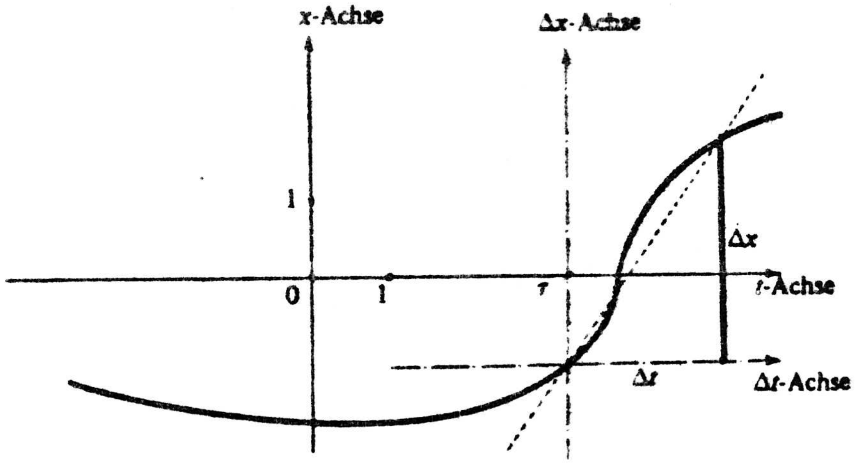
mit Konstanten v und s, der Geschwindigkeit und der Ausgangslage des Körpers. Im Zeit–Weg–Diagramm erhält man das Bild einer Geraden.



Wird der Körper von einer Kraft gelenkt, ist ein komplizierter Bewegungsablauf

$$x = f(t)$$

zu erwarten. Der durch die Funktion f gegebene Zusammenhang zwischen Zeit und Ort des Körpers wird wesentlich von der Kraft bestimmt. Das Zeit–Weg–Diagramm liefert das Schaubild der Funktion f.



Newton beantwortete als erster erfolgreich die Frage, wie auf eine derart komplizierte Bewegung der Begriff „Geschwindigkeit" übertragen werden könne. Da ja die Antwort allgemein bekannt ist, kann ich mich kurz fassen: Man führt die Variable Δt ein, welche die Änderung der Zeit bezeichnet, definiert von ihr abhängig die Änderung des Ortes im Zeitintervall τ bis $\tau + \Delta t$ durch

$$\Delta x = f(\tau + \Delta t) - f(\tau)$$

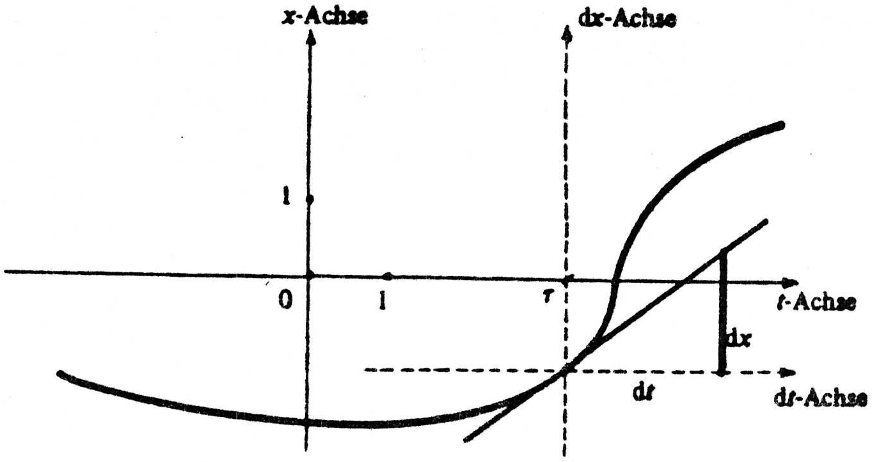
und definiert $\Delta x / \Delta t$ als mittlere Geschwindigkeit der Bewegung in der Zeit zwischen τ und $\tau + \Delta t$. Will man die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = \tau$ berechnen, muß man fragen, ob die Funktion

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(\tau + \Delta t) - f(\tau)}{\Delta t}$$

in der Variablen Δt für den Wert $\Delta t = 0$, für den sie nach der obigen Formel nicht definiert ist, stetig ergänzt werden kann. Ist dies der Fall, nennt man f in τ differenzierbar und den entsprechenden Funktionswert $f'(\tau)$ die Ableitung von f an der Stelle τ – physikalisch: die Momentangeschwindigkeit der Bewegung zum Zeitpunkt $t = \tau$.

Einige Unterschiede zur derzeit gängigen „modernen" Schulmathematik seien gleich aufgezeigt: Δt und Δx sind wie t und x keine Zahlen, auch keine Leerstellen für Zahlen, sondern Variable. Die Definition der Differenzierbarkeit gründet auch nicht auf dem Begriff des Grenzwertes von Folgen, sondern auf dem der *Stetigkeit*. Im Lehrplan wird dem Grenzwert von Folgen eine überhöhte Bedeutung beigemessen. Die Epsilontik, die dem Schüler in der 6. Klasse ohnehin schwer genug fällt, könnte bis auf die Definition der Stetigkeit einer Funktion völlig aus der Schule verbannt werden.

Einer Idee von Leibniz folgend, führt man statt der Variablen Δt für die zeitliche Änderung und statt Δx für die Ortsänderung neue Variable ein, die dem Begriff der Momentangeschwindigkeit $f'(\tau)$ im Zeitpunkt τ besser angepaßt sind. Leibniz nannte diese neuen Variablen dt und dx, *die Differentiale von Zeit und Ort.* Zwar bedeutet dt genauso wie Δt die zeitliche Änderung; hingegen steht dx, abweichend von Δx für die Ortsänderung *entlang der Tangente* und nicht entlang der Funktionskurve.



dx würde bei positivem dt nur dann mit Δx übereinstimmen, wenn man den Körper im Zeitpunkt $t = \tau$ von der einwirkenden Kraft befreite. Die tangentiale Ortsänderung dx wird nur deshalb vom Körper nicht weiter befolgt, weil ihn nach $t = \tau$ einwirkende Kräfte davon ablenken.

Da dx entlang der Tangente in Abhängigkeit zu dt verläuft, gilt:

$$dx = f'(t)dt,$$

folglich ist

$$\frac{dx}{dt} = f'(t).$$

dx/dt nennt man zurecht einen Differential*quotienten*, weil er der Quotient zweier Differentiale ist.

Wieder sei betont: Differentiale sind keine Zahlen, insbesondere keine unendlich kleinen Zahlen, sondern Variable, der Differentialquotient ist kein Symbol, sondern ein echter Quotient, und es ist in der Formel $dx = f'(t)dt$ keineswegs verboten, daß dt den Wert Null annimmt.

Die Ableitungsregel

$$(f+g)' = f' + g',$$

und die Tatsache, daß bei

$$f(t) = c \ (= \text{const.}), \qquad g(t) = ct, \qquad h(t) = t^2$$

die Ableitungen

$$f'(t) = 0, \qquad g'(t) = c, \qquad h'(t) = 2t$$

lauten, sind ohne Bedenken auf Differentiale übertragbar:

$$\boxed{\begin{aligned} d(x+y) &= dx + dy \\ d(c) &= 0 \\ d(ct) &= c\,dt \\ d(t^2) &= 2t\,dt \end{aligned}}$$

Der Nachweis erfolgt in üblicher Weise. Z.B. ist bei $x = h(t) = t^2$ wegen

$$\frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t$$

der linke Quotient für $\Delta t = 0$ stetig fortsetzbar und wird an der Stelle $\Delta t = 0$ gleich $2t$. Deshalb ist $h'(t) = 2t$ und $d(h(t)) = h'(t)dt = 2t\,dt$, wie behauptet.

Auch die Kettenregel beweist man wie üblich: Hängen x von t gemäß $x = f(t)$ und y von x gemäß $y = g(x)$ ab, kann man nach dem Zuordnungsgesetz $y = F(t) = g(f(t))$ die Variable y selbst als eine von t abhängige Variable auffassen. Sowohl f als auch g seien differenzierbar. Wegen der Stetigkeit von f hat der Grenzübergang $\Delta t \to 0$ für $\Delta x = f(t+\Delta t) - f(t)$ $\Delta x = 0$ zur Folge; ferner ist zu bemerken, daß die Funktion φ mit

$$\varphi(\Delta x) = \begin{cases} \dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} & \text{bei } \Delta x \neq 0 \\[2ex] g'(x) \quad \text{bei } \Delta x = 0 \end{cases}$$

wegen der Differenzierbarkeit von g stetig ist. Deshalb ergibt sich für $x = f(t)$ aus

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} = \frac{g(f(t+\Delta t))-g(f(t))}{\Delta t} =$$
$$= \varphi(f(t+\Delta t)-f(t))\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

beim Übergang zum Grenzwert für $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} = g'(f(t))f'(t).$$

Damit ist die Kettenregel $F'(t) = g'(f(t))f'(t)$ für Ableitungen nachgewiesen. Bedenkt man, daß $x = f(t)$ und

$$F'(t) = \frac{dy}{dt}, \qquad g'(f(t)) = g'(x) = \frac{dy}{dx}, \qquad f'(t) = \frac{dx}{dt}$$

gelten, lautet die Kettenregel in Differentialgestalt

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

oder noch eindringlicher:

$$\boxed{dy = \frac{dy}{dx}dx}$$

Die scheinbare Trivialität dieser Formel war wohl Anlaß für die weitverbreitete Mär, die in Differentialform angeschriebene Kettenregel sei bloß eine mnemotechnische Hilfe, aber keine ernstzunehmende mathematische Formel. Das Gegenteil ist wahr: Die so angeschriebene Kettenregel legt nämlich fest, wie sich die Differentiale von zwei *abhängigen* Variablen verhalten: sie verhalten sich genauso, wie wenn eine dieser Variablen – im obigen Beispiel x – eine *unabhängige* Variable wäre.

Aus den eingerahmten Differentiationsregeln (nicht Ableitungsregeln!) kann man leicht alle übrigen Differentiationsregeln ableiten: Die Produktregel z.B. gewinnt man aus der Identität

$$xy = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2);$$

es gilt:

$$d(xy) = \frac{1}{4}(d((x+y)^2) - d((x-y)^2)) =$$
$$= \frac{1}{4}(2(x+y)d(x+y) - 2(x-y)d(x-y)) =$$
$$= \frac{1}{2}((x+y)(dx+dy) - (x-y)(dx-dy)) =$$
$$= y\,dx + x\,dy.$$

Die Quotientenregel erhält man, indem man

$$z = \frac{x}{y}$$

zu $x = zy$ umformt, darauf die Produktregel anwendet und einsetzt:

$$dx = y\,dz + z\,dy, \quad dz = \frac{dx - z\,dy}{y} = \frac{dx - (x/y)dy}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$$

und die Differentiation der Umkehrfunktion wird gar nicht als allgemeine Formel angeschrieben (es gibt nämlich keine vernünftige), sondern am konkreten Beispiel abgeleitet. So folgt aus $y = \sqrt{x}$ $x = y^2$; daher

$$dx = 2y\,dy, \qquad dy = \frac{dx}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx;$$

oder aus $y = \operatorname{arctg} x$ folgt $x = \operatorname{tg} y$ und nach der Formel für die Ableitung des Tangens

$$dx = (1 + \operatorname{tg}^2 y)dy, \qquad dy = \frac{dx}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Weiß der Schüler, daß unbestimmte Integrale durch

$$\int dx = x + C$$

festgelegt sind, stellt die partielle Integration nach der Formel

$$\int y\,dx = xy - \int x\,dy$$

keine Merkregel, sondern einen exakten mathematischen Sachverhalt dar. In dieser Weise sollte man bei jeder partiellen Integration vorgehen. Z.B.:

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x\,d(\ln x) = x \ln x - \int x\frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx =$$

$$= x \ln x - x + C.$$

Die Substitutionsregel kann man genausowenig wie die Differentiationsregel der Umkehrfunktion allgemein anschreiben (und muß sie deshalb auch nicht auswendig lernen lassen). Sie wird am jeweiligen konkreten Beispiel verdeutlicht:

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}\int d(e^{-x^2}) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

oder

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \int d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos x} + C.$$

Ein geometrisches Anwendungsbeispiel ist die Differentialgleichung aller Kreise mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Man muß lediglich

$$x^2 + y^2 = c$$

auf beiden Seiten differenzieren und durch 2 kürzen:

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Der Tangentenanstieg

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

kann hieraus unmittelbar erschlossen werden.

Die elegante Rechenmethode mit Differentialen setzt sich nahtlos in die Physik fort und wird besonders hier zum unverzichtbaren Instrument für das Verstehen physikalischer Formeln.

Bestimmt man z.B. aus Bildweite b und Gegenstandsweite g die Brennweite f einer Linse nach der Formel

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g},$$

kann man bei Meßfehlern db bzw. dg nach

$$d(\frac{1}{f}) = -\frac{df}{f^2} = -\frac{db}{b^2} - \frac{dg}{g^2},$$

$$df = \frac{f^2}{b^2}db + \frac{f^2}{g^2}dg$$

den Fehler df der Brennweitenbestimmung approximativ angeben.

Aus der Gleichung

$$p = \frac{kNT}{V}$$

für ideale Gase (mit der Boltzmannkonstanten k) kann man aus

$$dp = \frac{kT}{V}dN + \frac{kN}{V}dT - \frac{kNT}{V^2}dV$$

die Druckänderung dp ersehen, je nachdem, ob sich die Molekülanzahl N um dN, die Temperatur T um dT oder das Volumen V um dV ändert.

Das zweite newtonsche Axiom lautet

$$m\frac{dv}{dt} = K,$$

wobei m für die Teilchenmasse, $v = dx/dt$ für die Teilchengeschwindigkeit und K für die Kraft steht, welche auf das Teilchen wirkt. Man multipliziert beide Seiten mit $v = dx/dt$, erweitert mit dt

$$mvdv = Kdx,$$

d.h.

$$d(m\frac{v^2}{2}) = Kdx,$$

und integriert:

$$m\frac{v^2}{2} = \int Kdx .$$

Das negativ genommene rechte Integral heißt die potentielle Energie. Somit ist der Energieerhaltungssatz im Eindimensionalen exakt hergeleitet.

Besonders wichtig ist der Spezialfall einer rücktreibenden Kraft $K = -kx$ mit einer Konstanten k, wie z.B. bei einer Feder. Setzt man der Einfachheit halber $k = m = 1$, erhält man nach dem zweiten newtonschen Axiom

$$\frac{dv}{dt} = -x,$$

wieder mit $v = dx/dt$ multipliziert und mit dt erweitert:

$$vdv = -xdx, \qquad xdx + vdv = 0.$$

Nach dieser Differentialgleichung bewegt sich das Teilchen in dem von x und v

aufgespannten Phasenraum auf einem Kreis – die Grundlage für die Theorie des harmonischen Schwingers ist somit gelegt.

Zur Veranschaulichung habe ich nur wenige und sehr einfache Beispiele vorgeführt. Bereits sie verdeutlichen, daß eine Mathematik, die sich *nicht* frei von inhaltlichen Vorstellungen machen will und sich *nicht* im elfenbeinernen Turm formaler Äquivalenzrelationen verliert, schon dem Schüler der Mittelschule verständlich machen kann: Die Mathematik ist ein Instrument, das, was in der Welt exakt ist, zu erfassen.

Dr.R.J. Taschner
Technische Universität
Gußhausstraße 27-29
A-1040 W i e n